OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 24 februarie 2024
Clasa a VI-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I

Fie mulțimile $A=\{x\in \mathbb{N} / x|6\}$ și $B=\left\{y\in \mathbb{N} / \frac{4}{y-1}\in \mathbb{N}\right\}$.

a) Determinați elementele mulțimilor *A* și *B*.

b) Calculați $card(A)+card(B)-card(A\cap B)$.

Soluție:

a) $x|6\Rightarrow x\in D_6\Rightarrow A=\{1,2,3,6\}$ 1p

$\frac{4}{y-1}\in \mathbb{N}\Rightarrow y-1|4\Rightarrow y-1\in D_4$, deci $y-1\in\{1,2,4\}$ 1p

obținem $B=\{2,3,5\}$ 1p

b) $A=\{1,2,3,6\}\Rightarrow card(A)=4$ 1p

$B=\{2,3,5\}\Rightarrow card(B)=3$ 1p

$A\cap B=\{2,3\}\Rightarrow card(A\cap B)=2$ 1p

$\Rightarrow card(A)+card(B)-card(A\cap B)=5$ 1p

SUBIECTUL II

Fie numerele naturale a, b și c, astfel încât a și b sunt direct proporționale cu numerele 4, respectiv 3, iar b și c sunt invers proporționale cu numerele 10, respectiv 6.

a) Arătați că $a^2 + b^2 = c^2$

b) Dacă, în plus, $5a + 10b - 2c = 80$, arătați că $a^{2024} + b^{2024} + c^{2024}$ nu este pătrat perfect.

Soluție:

a) $\frac{a}{4} = \frac{b}{3}$ și $10b = 6c$ 1p

Obținem $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k$ 1p

$\Rightarrow a = 4k,\ b = 3k,\ c = 5k \Rightarrow a^2 + b^2 = 16k^2 + 9k^2 = 25k^2 = c^2$ 1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

b) $20k + 30k - 10k = 80 \Rightarrow 40k = 80 \Rightarrow k = 2$ 1p

$a = 8; b = 6; c = 10$ 1p

avem $a^{2024} + b^{2024} + c^{2024} = 8^{2024} + 6^{2024} + 10^{2024}$

$u(8^{2024}) = 6, u(6^{2024}) = 6, u(10^{2024}) = 0$ 1p

$\Rightarrow u(8^{2024} + 6^{2024} + 10^{2024}) = 2 \Rightarrow a^{2024} + b^{2024} + c^{2024}$ nu este pătrat perfect 1p

SUBIECTUL III

Determinați numerele naturale nenule n și r știind că numerele 326, 420, 485 și 579 împărțite la n dau resturile r, 2r, 3r, respectiv 4r.

Soluție:

$326 : n = c_1$ rest r, $n > r$

$420 : n = c_2$ rest $2r$, $n > 2r$

$485 : n = c_3$ rest $3r$, $n > 3r$

$579 : n = c_4$ rest $4r$, $n > 4r$ 1p

obținem

$326 = n \cdot c_1 + r \mid \cdot 3$

$485 = n \cdot c_3 + 3r$

$\Rightarrow$

$978 = 3n \cdot c_1 + 3r$

$485 = n \cdot c_3 + 3r$ 1p

$\Rightarrow 493 = n(3c_1 - c_3)$ 1p

și

$420 = n \cdot c_2 + 2r \mid \cdot 2$

$579 = n \cdot c_4 + 4r$

$\Rightarrow$

$840 = 2n \cdot c_2 + 4r$

$579 = n \cdot c_4 + 4r$ 1p

$\Rightarrow 261 = n(2c_2 - c_4)$ 1p

deci $n \in D_{493} \cap D_{261}$, dar cmmdc$(493; 261) = 29 \Rightarrow n \in \{1; 29\}$ 1p

cum $n > r$ și $r \neq 0 \Rightarrow n = 29$

$326:29 = 11$ rest $7 \Rightarrow r = 7$ 1p

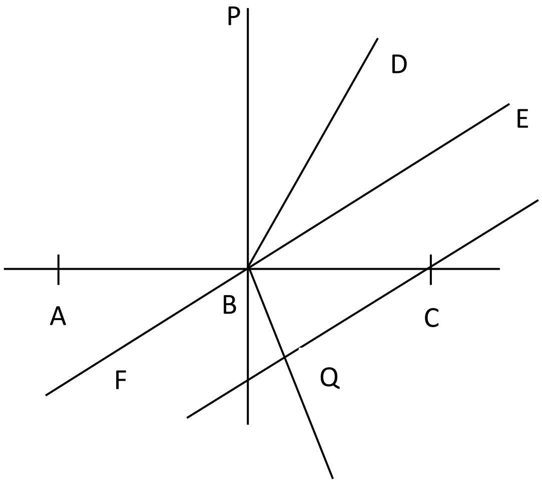
SUBIECTUL IV

Fie punctele coliniare *A*, *B* și *C*, în această ordine, astfel încât $AB = BC$. Pe mediatoarea segmentului *AC* se consideră punctul *P*, iar în interiorul unghiului *PBC* se consideră punctul *D* astfel încât unghiurile *PBD* și *ABF* sunt congruente, unde *BF* este semidreapta opusă bisectoarei *BE* a unghiului *DBC*.

a) Determinați măsura unghiului *PBD*.

b) Dacă paralela dusă prin *C* la *BE* intersectează bisectoarea unghiului *CBF* în punctul *Q*, aflați măsura unghiului *BQC*.

Soluție:



desen corect 1p

a) mediatoarea segmentului *AC* este *PB*, deci $\angle PBC = 90^0$, iar

$\angle DBE = \angle EBC = x$, *BE* bisectoare 1p

(BE și *(BF* opuse $\Rightarrow \angle EBC = \angle ABF$ (opuse la vârf) 1p

$\Rightarrow \angle PBD = \angle DBE = \angle EBC = \dfrac{90^0}{3} = 30^0$ 1p

b) *BQ* bisectoare $\Rightarrow \angle FBQ = \dfrac{\angle FBC}{2}$ 1p

A, *B*, *C* coliniare $\Rightarrow \angle FBC = \angle ABC - \angle ABF = 150^0$ 1p

CQ II *BE*, *E*, *B*, *F* coliniare $\Rightarrow \angle BQC = FBQ = 75^0$ (alterne interne) 1p